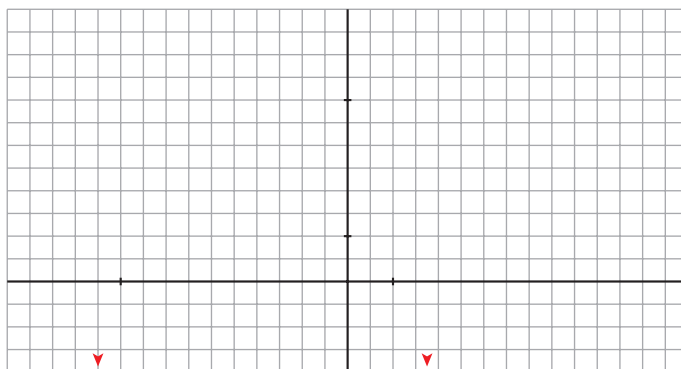


REFLEXIONA Y RESUELVE

Descripción de una gráfica

■ Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadrulado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$; $f(1,75) = 0$
- f es derivable en todo \mathbb{R} , salvo en $x = 2$.



- Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:



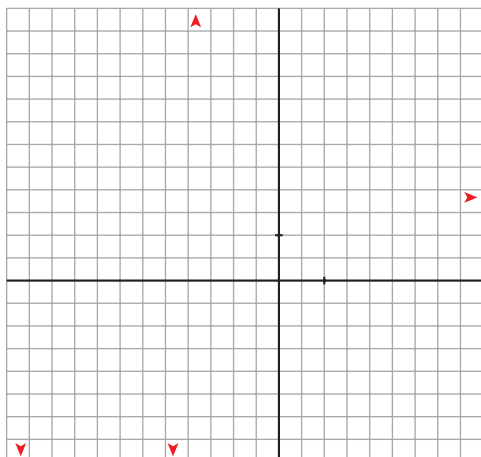
- Representa sobre unos ejes en papel cuadrulado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.

Representa tú la suya.

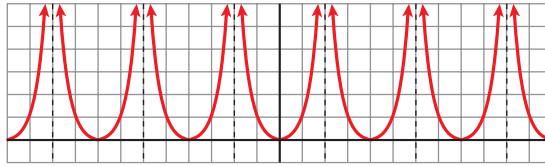
Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

¿Hay algún error en la representación? ¿Hay, acaso, error en la descripción?

¿Es todo correcto?



■ Observa esta gráfica:



• Halla la ordenada para las siguientes abscisas:

$$x = 0, x = 1, x = 3, x = -7, x = 12, x = -400, x = 13, x = -199$$

- ¿En qué puntos no está definida esta función?
- ¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?
- ¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?

1. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

2. Halla el dominio de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $y = \ln(x^2 + 1)$

c) $y = \ln(x^2 - 1)$

d) $y = \frac{e^x}{x^2}$

3. Halla las simetrías y las periodicidades; di dónde son continuas y dónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = \text{sen } x + 1/2 (\text{sen } 2x)$

4. Halla las ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

e) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

f) $y = 2^{x-1}$

5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b) $y = \ln(x^2 + 1)$

6. Halla los puntos singulares de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

1. Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

2. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

b) $y = x^3 - 3x$

c) $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

1. Representa:

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x}$$

2. Representa:

a) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

b) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

1. Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Representa:

a) $y = \ln(x^2 + 4)$

b) $y = \ln(x^2 - 1)$

3. Representa:

$$\text{a) } y = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{e^{-x}}{-x}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$$

1. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

$$\text{a) } y = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{b) } y = \frac{3x}{x+1}$$

$$\text{c) } y = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^4}{x+1}$$

2. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

a) $y = \frac{x^2}{e^x}$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

c) $y = x + \sqrt{x}$

d) $y = \operatorname{tg} x$

e) $y = x \operatorname{sen} x$

f) $y = x - \cos x$

1. Representa:

a) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

c) $y = |x - 5|x$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

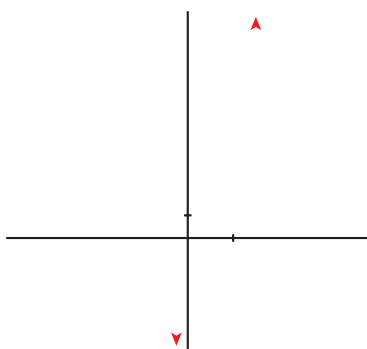
PARA PRACTICAR

Descripción de una gráfica

- 1 Representa una función continua y derivable en \mathbb{R} tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1$, $f'(x) \geq 0$ para cualquier x .



- 2 De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:

$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$)

$$f'(2) = 0, \quad f(2) = -1; \quad f'(-1) = 0, \quad f(-1) = -1$$

Representála.

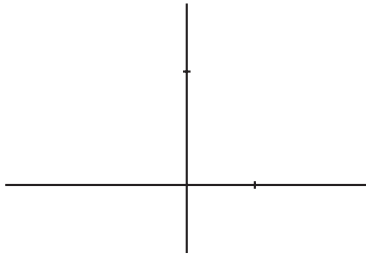
<

s3 Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:

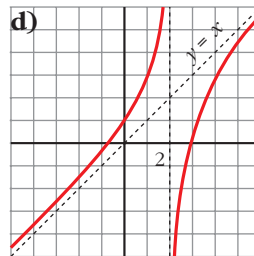
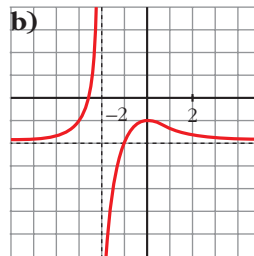
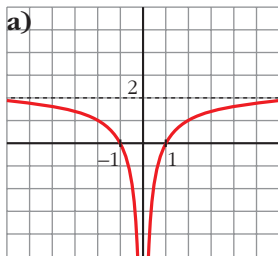
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, x = 0, x = 3, x = 4$$

$$f(-2) = 2; f(0) = 0; f(3) = 5; f(4) = 4$$



s4 Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



Funciones polinómicas

5 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

e) $y = x^5 - 5x^3$

f) $y = (x - 1)^3 - 3x$

6 Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Representálas gráficamente:

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

b) $y = 2 - (x - 3)^4$

c) $y = (x + 1)^6 - 5$

d) $y = 3 - (1 - x)^3$

Funciones racionales

- 7** En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

f) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

8 Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, posición y extremos relativos:

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$ b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$ c) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ d) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

Funciones "a trozos"

9 Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

10 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

PARA RESOLVER

11 Representa las siguientes funciones, estudiando:

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Crecimiento y extremos relativos.

$$\text{a) } y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{x}{(x - 2)^2}$$

$$\text{c) } y = \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 2}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^2}{9 - x^2}$$

$$\text{e) } y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

$$\text{f) } y = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$$

$$\text{g) } y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

$$\text{h) } y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$$

$$\text{i) } y = \frac{x^3}{x + 2}$$

$$\text{j) } y = \frac{(x - 2)^2}{x - 1}$$

- s12** a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}.$$

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f .

s13 Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, se pide:

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de f .

s14 Representa gráficamente la función:

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{4}{3}\right)x^3 + 2x^2 - 2$$

¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio $p(x)$?

s15 Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:

a) $y = \frac{e^x}{x^2 - 3}$

b) $y = \frac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

16 Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ c) $y = \text{sen } x + \text{cos } x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

- 17** Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las siguientes:

a) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

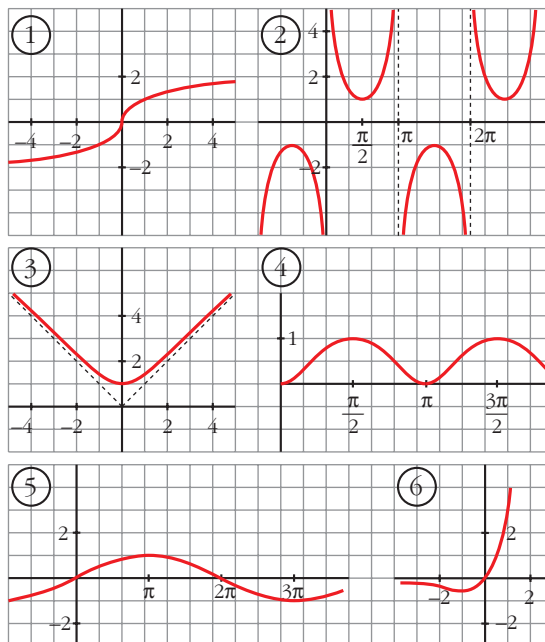
b) $y = x e^x$

c) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = \operatorname{sen}^2 x$



Página 333

18 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x - 1)e^x$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

c)



19 Estudia y representa las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \sqrt[3]{4 - x^2}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$x \rightarrow +\infty$ \mathcal{X} $x \rightarrow +\infty$ \mathcal{X}

20 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x + |x + 2|$

b) $y = 2x - |x - 3|$

c) $y = |x| + |x - 3|$

d) $y = x|x - 1|$

21 Representa gráficamente:

$$\text{a) } y = \frac{1}{|x| - 2}$$

$$\text{b) } y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$$

s22 Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación

$$y = \frac{2x}{1-x^2} \text{ para } x > 1.$$

En el punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

- Halla la ecuación de la tangente.
- Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P .
- Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje OX .

s23 Considera la función $f(x) = x^2|x - 3|$:

- a) Halla los puntos donde f no es derivable.
- b) Calcula sus máximos y mínimos.
- c) Representala gráficamente.

s24 La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$.
Halla el valor de k y representa la función así obtenida.

s25 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Determina los puntos de corte con los ejes y sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.

s26 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0]$, estudia la existencia de puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, la existencia de puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo \mathbb{R} .

- 27** Dada la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b , representa la función.

- 28** Halla los valores de a , b y c para los cuales la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en $(0, 1)$.

- 29** Determina las asíntotas de estas funciones:

a) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{3x}$

b) $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

CUESTIONES TEÓRICAS

- 30** ¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?
- 31** ¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?

32 Comprueba que la función $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.

33 Sobre la gráfica de la función $y = |x^2 - 4|$, indica los intervalos de concavidad y de convexidad. ¿Cuáles son sus puntos de inflexión?

34 La función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.

35 ¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?

s36 Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Representala.

s37 Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.

s38 Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?

39 La función $f(x) = x + e^{-x}$, ¿tiene alguna asíntota? En caso afirmativo, hállala.

40 ¿Son iguales las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{|x|}$? Justifica tu respuesta.

41 ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función $y = \ln|x|$ y cuál a $y = |\ln x|$?

42 ¿Qué tipo de simetría tienen las siguientes funciones?:

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$

b) $y = |x| - 2$

c) $y = \operatorname{tg} x$

d) $y = x^3 - x$

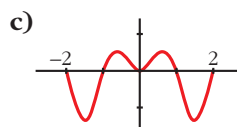
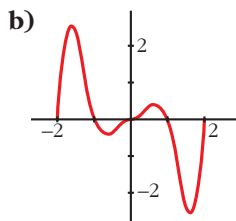
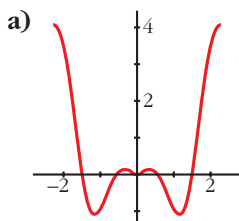
PARA PROFUNDIZAR

43 Estudia y representa $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.

- 44** Representa la función $y = x - \operatorname{arc\,tg} x$ determinando el dominio de definición, asíntotas, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento.

- 545** Las siguientes gráficas corresponden a las funciones $f(x) = x \operatorname{sen}(\pi x)$; $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(\pi x)$; $h(x) = x^2 \operatorname{cos}(\pi x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Relaciona, de forma razonada, cada gráfica con su correspondiente función.



- 46** Para averiguar las asíntotas de $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ tuvimos que realizar un notable esfuerzo (páginas 320 y 321).

Sin embargo, utilizando el sentido común y casi sin ningún tecnicismo, podríamos haberlo resuelto fácilmente. Veamos cómo:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x - 1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$$

Es decir, nuestra función, para valores grandes de $|x|$, se aproxima mucho a $y = |x - 1|$.

Además, es “un poco menor” (observa que se resta 1 en el radicando). La función $y = |x - 1|$ está formada, precisamente, por las dos asíntotas de nuestra función.

a) Averigua, de forma similar, las asíntotas de:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x} \quad y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

b) Ídem, $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

47 Aunque la palabra *asíntota* la hemos aplicado a rectas que se aproximan a una gráfica, tiene un significado más amplio: se dice que dos curvas son *asintóticas* cuando, al alejarse del origen, la distancia entre ellas tiende a cero.

Por ejemplo, la parábola $y = x^2 + 1$ es *asintótica* a la función:

$y = f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ (revisa su gráfica en la página 319). Es fácil comprobarlo:

$$\frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \quad (\text{Simplemente hemos efectuado el cociente}).$$

La diferencia entre las dos funciones es $\frac{1}{x^2 - 1}$, que tiende a cero cuando

$x \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow +\infty$. Además, toma valores positivos, por lo que la gráfica de $y = f(x)$ queda por encima de la parábola. Este resultado permite representar la función de forma más precisa apoyándonos en la representación de la parábola:

a) Razonando de la misma forma, halla la parábola asintótica a la función:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x}$$

Determina la posición de la curva respecto de ella.

b) Representa la gráfica de la función teniendo en cuenta esos datos, así como la asíntota vertical y el punto singular (solo hay uno de abscisa $x = 2$).

48 Halla, en cada caso, la parábola asintótica y estudia la posición de la curva con respecto de ella. Representa la información obtenida:

a) $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x^3 - 1}{x}$

c) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

d) $y = \frac{x^3}{x + 1}$

49 Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b) $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

c) $y = \ln(\text{sen } x)$

d) $y = 2x + \text{sen } 2x$

e) $y = \frac{\text{sen } x}{x} + 2$

f) $y = \frac{\text{cos } x}{x}$

AUTOEVALUACIÓN

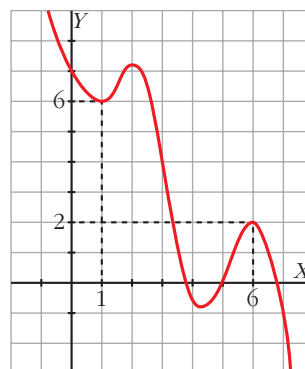
1. Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

- 3.** Estudia las asíntotas y los puntos singulares de $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$ y represéntala gráficamente.

4. Representa esta función: $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{e^x}$

- 5.** En la función $y = \frac{4x^3 + 1}{x}$, halla los puntos de corte con los ejes y las asíntotas. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y esboza la gráfica.

6. Dibuja una función continua en \mathbb{R} que tenga un mínimo relativo en $(1, 6)$ y un máximo relativo en $(6, 2)$. Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?



7. Halla los máximos y los mínimos de la función $f(x) = x\sqrt{x+3}$. ¿Tiene asíntotas? Haz una gráfica aproximada de esta función.

8. Dibuja la gráfica de $f(x) = |x + 3| + |x - 1|$.

9. ¿Qué gráfica corresponde

a $f(x) = \frac{x + 1}{|x|}$?

